

ΘΕΜΑ Α

A1. γ A2. δ A3. α A4. δ

A5. α) Λάθος β) Σωστό γ) Λάθος δ) Σωστό ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση το (i).

Υπολογίζουμε την απόσταση d_2 με Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΣΚΛ.

$$d_2 = \sqrt{(2\lambda_1)^2 + \left(\frac{3\lambda_1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25\lambda_1^2}{4}} = \frac{5\lambda_1}{2}, d_2 - d_1 = \frac{5\lambda_1}{2} - 2\lambda_1 = \frac{\lambda_1}{2}$$

Όταν διπλασιάζουμε την συχνότητα f η ταχύτητα των κυμάτων παραμένει σταθερή αλλά μεταβάλλεται το μήκος κύματος: $\begin{cases} u = \lambda_1 \cdot f \\ u = \lambda_2 \cdot 2f \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot f = \lambda_2 \cdot 2f \Leftrightarrow \lambda_1 = 2\lambda_2$

$$\text{Έχουμε: } d_2 - d_1 = \frac{\lambda_1}{2} = \frac{2\lambda_2}{2} = \lambda_2$$

Άρα: $d_2 - d_1 = \lambda_2$ ακέραιο πολλαπλάσιο του λ_2 επομένως το σημείο Σ είναι σημείο ενίσχυσης.

B2. Σωστή απάντηση το (iii).

Διατήρηση στροφορμής για το σώμα m :

$$\text{Είναι: } L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\epsilon\lambda} \Leftrightarrow muR = mu_{\tau\epsilon\lambda} \frac{R}{2} \Leftrightarrow v_{\tau\epsilon\lambda} = 2v \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας για την κίνηση του σώματος:

$$K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{o\lambda} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_{\tau\epsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2}mv^2 = W_F \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}m4\omega^2R^2 - \frac{1}{2}m\omega^2R^2 = W_F \Leftrightarrow \frac{3}{2}m\omega^2R^2 = W_F$$

Β3. Σωστή απάντηση το (i).

Η εξίσωση συνέχειας δίνει:

$$A_{\Gamma} v_{\Gamma} = A_{\Delta} v_{\Delta} \Leftrightarrow 2A_{\Delta} v_{\Gamma} = A_{\Delta} v_{\Delta} \Leftrightarrow v_{\Delta} = 2v_{\Gamma}$$

$$\text{Βεληνεκές: } S = 4h = v_{\Delta} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\text{Υψώνοντας στο τετράγωνο: } 16h^2 = v_{\Delta}^2 \frac{2h}{g} \Leftrightarrow v_{\Delta}^2 = 8gh \Leftrightarrow h = \frac{v_{\Delta}^2}{8g} \Leftrightarrow h = \frac{v_{\Gamma}^2}{2}$$

$$\text{Εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli: } P_{\Gamma} + \frac{1}{2}\rho v_{\Gamma}^2 = P_{\Delta} + \frac{1}{2}\rho v_{\Delta}^2 + \rho gh \Leftrightarrow$$

$$P_{\Gamma} + \frac{1}{2}\rho v_{\Gamma}^2 = P_{\Delta} + \frac{1}{2}\rho v_{\Delta}^2 + \rho gh \Leftrightarrow$$

$$P_{\Gamma} - P_{\Delta} = \frac{1}{2}\rho v_{\Delta}^2 - \frac{1}{2}\rho v_{\Gamma}^2 + \rho gh \Leftrightarrow$$

$$P_{\Gamma} - P_{\Delta} = \frac{1}{2}\rho(2v_{\Gamma})^2 - \frac{1}{2}\rho v_{\Gamma}^2 + \frac{\rho g v_{\Gamma}^2}{2g} \Leftrightarrow$$

$$P_{\Gamma} - P_{\Delta} = 2\rho v_{\Gamma}^2.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το σώμα m_1 διέρχεται από τη ΘΙΤ της ταλάντωσής του, έχοντας ακριβώς πριν την κρούση ταχύτητα: v_{max_1} .

$$\text{Είναι } v_{max_1} = \omega_1 A_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} A_1 = \sqrt{\frac{50}{2}} \cdot \Delta l = 5 \cdot 0,4 = 2 \text{ m/sec}$$

Απομακρυνόμενο από την πηγή καταγράφει συχνότητα

$$f_1 = \frac{v - v_{max_1}}{v} \cdot f_s = \frac{340 - 2}{340} f_s = \frac{338}{340} f_s$$

Η κρούση που ακολουθεί είναι πλαστική και ισχύει:

$$(\text{ΑΔΟ}): m_1 v_{1max} = (m_1 + m_2) v_{2max} \Rightarrow v_{2max} = 1 \text{ m/sec}$$

Το συσσωμάτωμα εξακολουθεί ν' απομακρύνεται από τη ΘΙΤ και έχω:

$$f_2 = \frac{v - v_{max_2}}{v} \cdot f_s = \frac{340 - 1}{340} f_s = \frac{339}{340} f_s$$

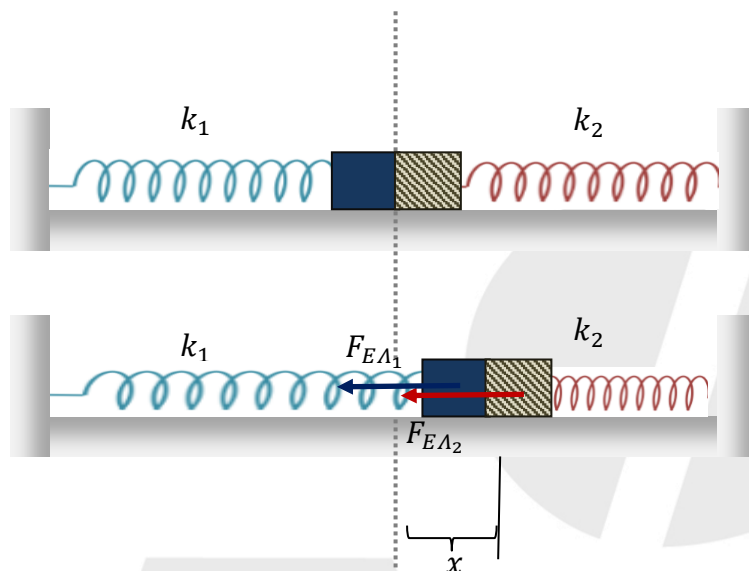
$$\text{Άρα } \frac{f_1}{f_2} = \frac{338}{339}.$$

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Γ2. Τα ελατήρια είναι οριζόντια και η θέση φυσικού μήκους ταυτίζεται με τη θέση ισορροπίας ταλάντωσης του συσσωματώματος. Το συσσωμάτωμα έχει σχεδιαστεί σε μια τυχαία απομάκρυνση x από m ΘΙΤ. (θεωρώντας θετική φορά προς τα δεξιά). Για τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται πάνω του ισχύει:

$$\Sigma F = -k_1x - k_2x = -(k_1 + k_2)x, \text{ όπου: } k_1 = k_2 = k$$

Άρα $\Sigma F = -2kx$ όπου $2k = D$ η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης.



Γ3. Πρόκειται για τη χρονική στιγμή που το συσσωμάτωμα ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά στη δεξιά ακραία θέση της ταλάντωσής του. Καθώς σε αυτή τη θέση δεν υπάρχει σχετική κίνηση παρατηρητή - πηγής.

Ο χρόνος μετάβασης από τη θέση της σύγκρουσης έως την παραπάνω ακραία θέση είναι:

$$\Delta t = \frac{T}{4} \text{ όπου } T \text{ η περίοδος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{2k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{5}$$

$$\text{άρα } \Delta t = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10} \text{ sec}$$

Γ4. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος ισούται με τη συνισταμένη δύναμη. Δηλαδή: $\frac{\Delta P}{\Delta t} = \Sigma F = -2kx$. Η μέγιστη τιμή του επιτυγχάνεται στις ακραίες θέσεις:

$$\left| \frac{\Delta P}{\Delta t} \right|_{\max} = 2kA \text{ όπου } A \text{ το πλάτος ταλάντωσης του συσσωματώματος.}$$

$$v_{\max_2} = \sqrt{\frac{2k}{2m}} A \Rightarrow v_{\max_2} = \sqrt{\frac{50}{2}} A \Rightarrow 1 = 5A \Rightarrow \frac{1}{5} m = A$$

$$\text{άρα } \left| \frac{\Delta P}{\Delta t} \right|_{\max} = 2 \cdot 50 \frac{1}{5} = 20 N.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχύει: $I_{\rho-\Delta(O)} = I_{\rho(O)} + I_{\Delta(O)}$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Steiner για τη ράβδο

$$\begin{aligned} I_{\rho(O)} &= I_{cm(\rho)} + M \frac{l^2}{4} = \frac{1}{12} M l^2 + \frac{1}{4} M l^2 = \\ &= \frac{1}{3} M l^2 = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 9 = 24 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

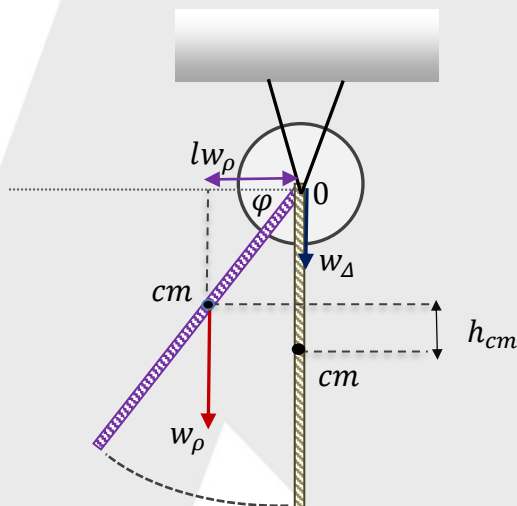
Ο δίσκος περιστρέφεται γύρω από το κέντρο μάζας του

$$I_{\Delta(O)} = I_{cm(\Delta)} = \frac{1}{2} m_{\Delta} R_{\Delta}^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{2}{4} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Οπότε συνολικά:

$$I_{\rho-\Delta(O)} = I_{\rho(O)} + I_{\Delta(O)} = 24 + 1 = 25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Δ2.



Τη χρονική στιγμή $t = 0$ κόβουμε το νήμα $Z - \Gamma$.

Ροπή στο σύστημα ράβδος-δίσκος δημιουργεί, ως προς το (O) , μόνο το βάρος της ράβδου.

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Οπότε ως προς το σημείο O έχουμε:

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)_{\rho-\Delta} = \Sigma \tau_{\varepsilon\xi} = \tau_{w\rho} = Mg \cdot l_{w\rho}$$

όπου $l_{w\rho}$ ο μοχλοβραχίονας του βάρους της ράβδου ως προς το (O).

$$l_{w\rho} = \frac{l}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{3}{2} \cdot 0,6 = 0,9m$$

$$\text{Τελικά: } \left(\frac{dL}{dt}\right)_{\rho-\Delta} = 8 \cdot 10 \cdot 0,9 = 72 \text{ kg} \frac{m^2}{s^2}$$

Δ3. Στο σύστημα ράβδος – δίσκος έργο παράγει μόνο το βάρος της ράβδου.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου – ενέργειας από την αρχική μέχρι την κατακόρυφη θέση της ράβδου έχουμε:

$$K_T - K_A = W_{w\rho}$$

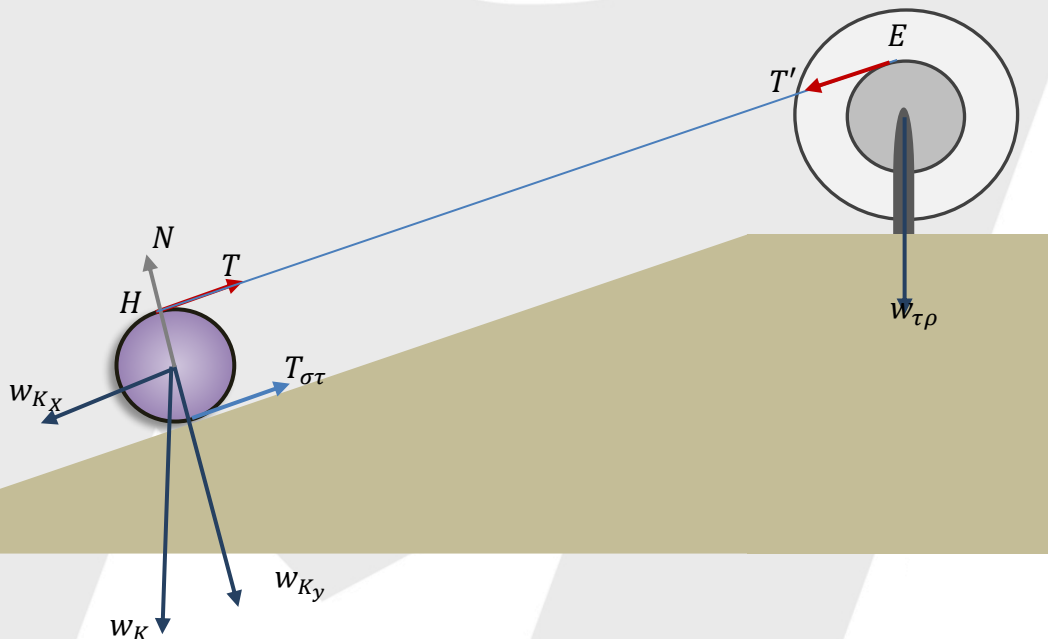
$$K_T = Mg \cdot h_{cm}$$

$$\text{Για το } h_{cm} \text{ έχουμε: } h_{cm} = \frac{l}{2} - \frac{l}{2} \eta\mu\varphi$$

$$h_{cm} = \frac{l}{2} (1 - \eta\mu\varphi) = \frac{3}{2} (1 - 0,8) = 0,3m$$

$$\text{Τελικά } K_T = 8 \cdot 10 \cdot 0,3 = 24 \text{ Joule}$$

Δ4.



Το νήμα (2) δεν ολισθαίνει στην τροχαλία, οπότε: $dS_E = dS_H$ και $v_E = v_H$, $\alpha_E = \alpha_H$.

Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999

Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300

Ελ. Βενιζέλου 45 Ν.Σμύρνη, 210 93 10 320

www.methodiko.net

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Ο κύλινδρος κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει. Άρα:

$$dS_{cm} = R \cdot d\theta_K, \quad v_{cm} = R \cdot \omega_K, \quad a_{cm} = R \cdot a_{\gamma_K}.$$

Το H είναι το ανώτερο σημείο του κυλίνδρου, οπότε: $a_H = 2a_{cm}$.

Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την μεταφορική και την περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου έχουμε:

$$\bullet \quad \Sigma F = m \cdot a_{cm} \Leftrightarrow mg \cdot \eta\mu\varphi - T - T_{\sigma\tau} = m \cdot a_{cm} \quad (1)$$

$$\bullet \quad \Sigma \tau = I_{cm(K)} \cdot a_{\gamma_K} \Leftrightarrow$$

$$-TR + T_{\sigma\tau} \cdot R = \frac{1}{2}mR^2 \cdot a_{\gamma_K} \Leftrightarrow T_{\sigma\tau} - T = \frac{1}{2}m \cdot a_{cm} \quad (2)$$

Αθροίζοντας τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη:

$$mg \cdot \eta\mu\varphi - 2T = \frac{3}{2}m \cdot a_{cm(K)} \quad (3)$$

Εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής στην τροχαλία έχουμε:

$$\Sigma \tau = I_{cm(\tau\rho)} \cdot a_{\gamma_{\tau\rho}} \Rightarrow T' \cdot R = I_{cm(\tau\rho)} \cdot a_{\gamma_{\tau\rho}} \quad (4)$$

Το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό οπότε: $T = T'$ (5)

Από τη σύνδεση των σημείων H και E έχουμε

$$a_H = a_E \Rightarrow 2a_{cm_K} = a_{\gamma_{\tau\rho}} \cdot R \text{ οπότε } a_{\gamma_{\tau\rho}} = \frac{2a_{cm_K}}{R} \quad (6)$$

Η σχέση (4) μέσω των (5) και (6) γίνεται:

$$T \cdot R = I_{cm_{\tau\rho}} \cdot \frac{2a_{cm_K}}{R} \Rightarrow T = I_{cm(\tau\rho)} \cdot \frac{2a_{cm_K}}{R^2} \quad (7)$$

Η σχέση (3) μέσω της σχέσης (7) γίνεται

$$mg \cdot \eta\mu\varphi - 2 \cdot I_{cm_{\tau\rho}} \cdot \frac{2a_{cm(K)}}{R^2} = \frac{3}{2}ma_{cm(K)} \Leftrightarrow mg \cdot \eta\mu\varphi = a_{cm(K)} \left(\frac{4I_{cm(\tau\rho)}}{R^2} + \frac{3}{2}m \right)$$
$$30 \cdot 10 \cdot 0,8 = a_{cm(K)} \left(\frac{4 \cdot 1,95}{0,04} + \frac{3}{2} \cdot 30 \right) \Leftrightarrow 240 = a_{cm}(195 + 45) \Rightarrow a_{cm} = 1 \text{ m/s}^2$$

Το κέντρο μάζας του κυλίνδρου εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

$$\text{Άρα } s = \frac{1}{2}a_{cm(K)} \cdot t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2s}{a_{cm}}} = 2\text{s}$$

$$v_{cm(K)} = a_{cm(K)} \cdot t_1 = 1 \cdot 2 = 2\text{ m/s}$$

Επιμέλεια:

Μπάμπης Μπέσης, Χαρίλαος Τσαγκαράκης, Στέφανος Μαυρογιώργης, Αντώνης Παρασκευάς,
Ιωάννης Τριανταφύλλου

Ευχόμαστε καλά αποτελέσματα!

Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999

Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300

Ελ. Βενιζέλου 45 Ν.Σμύρνη, 210 93 10 320

www.methodiko.net