ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ

κύριο ΦΟΥΝΤΟΥΛΑΚΗ ΜΑΝΩΛΗ

κυρία ΦΟΥΝΤΟΥΛΑΚΗ ΑΓΓΕΛΙΚΗ

του ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ

Όριον φροντιστήριο μέσης εκπαίδευσης

www.orion.edu.gr

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη από τη σελ. 251 του σχολικού βιβλίου

Α2. Ορισμός από τη σελ. 273 του σχολικού βιβλίου

Α3. Ορισμός από τη σελ. 150 του σχολικού βιβλίου

Α4. $\alpha \to \Lambda$
$\beta \to \Sigma$
$\gamma \to \Sigma$
$\delta \to \Sigma$
$\varepsilon \to \Lambda$

ΘΕΜΑ Β

Β1. $2|z|^2 + (z+\overline{z})i - 4 - 2i = 0$

$$2\left(x^2+y^2\right) + 2xi - 4 - 2i = 0$$

$$\left(2x^2+2y^2-4\right) + \left(2x-2\right)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x^2+2y^2-4=0 \\ \text{και} \\ 2x-2=0 \Leftrightarrow x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2+2y^2=4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2y^2=2 \Leftrightarrow y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm 1$$

Άρα $z_1=1+i$ και $z_2=1-i$

B2. $w=3\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{39}=3\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{39}=3\left[\dfrac{(1+i)^2}{(1+i)(1-i)}\right]^{39}=3\left(\dfrac{1+2i-1}{1+1}\right)^{39}$

$$=3\left(\frac{2i}{2}\right)^{39}=3\cdot i^{39}=3i^{4\cdot 9+3}=3\cdot i^3=-3i$$

B3. $|u+w|=|4z_1-z_2-i| \Leftrightarrow$

$$|u-3i|=|4(1+i)-(1-i)-i| \Leftrightarrow$$

$$|u-3i|=|4+4i-1+i-i| \Leftrightarrow |u-3i|=|3+4i| \Leftrightarrow$$

$$|u-3i|=\sqrt{9+16} \Leftrightarrow |u-3i|=5,$$

άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του u είναι κύκλος με κέντρο $K(0,\ 3)$ και ακτίνα $\rho=5$, οπότε $M(w)\in C:\ x^2+(y-3)^2=25$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $h'(x)=1-\dfrac{1}{e^x+1}(e^x+1)'=1-\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{e^x+1-e^x}{e^x+1}=\dfrac{1}{e^x+1}>0$ για κάθε $x\in R$

άρα $h \uparrow$ στο R

$$h''(x)=\frac{-(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}=\frac{-e^x}{(e^x+1)^2}<0\ ,\quad \forall x\in R$$

άρα η h στρέφει τα κοίλα κάτω στο R. Άρα h' $\downarrow$ στο R.

Γ2. $e^{h(2h'(x))} < \dfrac{e}{e+1} \overset{\ln x \uparrow}{\Leftrightarrow} h(2h'(x)) < \ln\dfrac{e}{e+1} \Leftrightarrow$

$h(2h'(x)) < \ln e - \ln(e+1) \Leftrightarrow h(2h'(x)) < 1 - \ln(e+1) \overset{*}{\Leftrightarrow}$

$h(2h'(x)) < h(1) \overset{h \uparrow}{\Leftrightarrow} 2h'(x) < 1 \Leftrightarrow h'(x) < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$h'(x) < h'(0) \overset{h' \downarrow}{\Leftrightarrow} x>0$

**** β' τρόπος***

$e^{h(x)} = e^{x-\ln(e^x+1)} = \dfrac{e^x}{e^{\ln(e^x+1)}} = \dfrac{e^x}{e^x+1}\cdot$

Άρα η δοθείσα ανίσωση γίνεται:

$e^{h(2h'(x))} < e^{h(1)} \overset{e^x \uparrow}{\Leftrightarrow} h(2h'(x)) < h(1)$

Γ3. $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x - \ln(e^x+1)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln e^x - \ln(e^x+1)\right] =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}\right) \qquad (1)$

Έστω $u = \dfrac{e^x}{e^x+1}$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} u = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1} \underset{D.L.H.}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x} = 1$

$(1) \Rightarrow \lim\limits_{u\to1} \ln u = 0$, άρα η ευθεία $y=0$ (άξονας x΄x) είναι οριζόντια

ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\ln\left(e^x+1\right)}{x}\underset{D.L.H.}{\overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{1}{e^x+1}}{1}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{e^x+1}}{1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x+1}=1=\lambda$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(h(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\ln\left(e^x+1\right)-x\right)=-\lim_{x\to-\infty}\ln\left(e^x+1\right)=0=\beta$$

Άρα η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$.

Γ4. $\varphi(x)=0\Leftrightarrow e^x\left(h(x)+\ln 2\right)=0\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}h(x)+\ln 2=0\Leftrightarrow h(x)=-\ln 2$

$$h(x)=h(0)\overset{h\text{"1-1"}}{\Leftrightarrow}x=0$$

$$\varphi(x)>0\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}h(x)+\ln 2>0\Leftrightarrow h(x)>-\ln 2\Leftrightarrow h(x)>h(0)\overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow}x>0$$

φ συνεχής στο R ως πράξη συνεχών.

$$E=\int_0^1\varphi(x)dx=\int_0^1 e^x\left(h(x)+\ln 2\right)dx=\int_0^1 e^x\left(x-\ln\left(e^x+1\right)+\ln 2\right)dx$$

$$=\int_0^1 x\cdot e^x dx-\int_0^1\ln\left(e^x+1\right)e^x dx+\ln 2\int_0^1 e^x dx\underset{\substack{x_2=1\Rightarrow u_2=e+1\\ x_1=0\Rightarrow u_1=2}}{\overset{u=e^x+1\quad du=e^x dx}{=}}$$

$$=\int_0^1 x\left(e^x\right)'dx-\int_2^{e+1}\ln u\,du+\ln 2\left[e^x\right]_0^1=$$

$$=\left[x\cdot e^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x dx-\int_2^{e+1}(u)'\cdot\ln u\,du+\ln 2(e-1)=$$

$$=1\cdot e-\left[e^x\right]_0^1-\left[u\ln u\right]_2^{e+1}+\int_2^{e+1}u\frac{1}{u}du+\ln 2(e-1)=$$

$$=\cancel{e}-\cancel{e}+1-(e+1)\ln(e+1)+2\ln 2+\left[u\right]_1^{e+1}+\ln 2\cdot e-\ln 2=$$

$$=1-(e+1)\ln(e+1)+\ln 2+e+1-2+e\ln 2=$$

$= -(e+1)\ln(e+1) + \ln 2 + e + e\ln 2$ τ.μ.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{D.L.H.}}{=}} \dfrac{(e^x-1)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$

$f(0) = 1$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, οπότε f συνεχής στο $x_0 = 0$

Για $x \neq 0$ $\quad f'(x) = \dfrac{(e^x-1)' \cdot x - (e^x-1)(x)'}{x^2} = \dfrac{e^x \cdot x - e^x + 1}{x^2}$

Έστω $g(x) = e^x \cdot x - e^x + 1$ με $x \in R$ και $g(0) = 0$

$g'(x) = e^x \cdot x + e^x - e^x = x \cdot e^x$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \cdot e^x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	Ολ.Ελαχ.	$\nearrow$

Για $x < 0 \overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow e^x \cdot x - e^x + 1 > 0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{e^x \cdot x - e^x + 1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$

Για $x > 0 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow e^x \cdot x - e^x + 1 > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$

Οπότε $f'(x) > 0 \quad \forall x \in R^*$ και f συνεχής στο R.

Άρα $f \uparrow$ στο R.

Δ2. α) $\varphi(x) = \int_2^{2f'(x)} f(u)\,du$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1-x}{x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi(0) = \int_1^{2f'(0)} f(u)\,du = \int_1^{2\cdot\frac{1}{2}} f(u)\,du = \int_1^1 f(u)\,du = 0$$

Άρα η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα την $x = 0$.

Για $x \neq 0$

$$f''(x) = \frac{\left(e^x\cdot x - e^x + 1\right)'\cdot x^2 - \left(e^x\cdot x - e^x + 1\right)\cdot 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{x\cdot e^x\cdot x^2 - \left(e^x\cdot x - e^x + 1\right)\cdot 2x}{x^4} = \frac{e^x\cdot x^2 - 2x\cdot e^x + 2e^x - 2}{x^3}$$

Για $x = 0$

$$\lim_{x\to 0} = \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} = \frac{\frac{e^x\cdot x - e^x + 1}{x^2} - \frac{1}{2}}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} = \frac{2e^x x - 2e^x + 2 - x^2}{2x^3} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$$

$$\lim_{x\to 0} = \frac{2e^x x - 2x}{6x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2e^x - 2}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{3x} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{3}=\frac{1}{3} \quad \text{άρα} \quad f''(0)=\frac{1}{3}$$

Άρα υπάρχει η f'' στο R .

$$\varphi'(x)=f\left(2f'(x)\right)\left(2f'(x)\right)'=2f\left(2f'(x)\right)\cdot f''(x)$$

$$f'(x)>0 \quad \forall x\in R \Rightarrow 2f'(x)>0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left(2f'(x)\right)>f(0)\Leftrightarrow$$

$$f\left(2f'(x)\right)>1>0$$

Αφού f κυρτή στο R θα είναι $f''(x)\geq 0 \quad \forall x\in R$

Μπορεί f'' να μηδενίζεται για μεμονωμένες τιμές και στα υπόλοιπα διαστήματα να είναι θετική.

Άρα $\varphi'(x)\geq 0 \quad \forall x\in R$ και πιθανόν να μηδενίζεται για μεμονωμένες τιμές.

Οπότε $\varphi \uparrow$ στο R άρα φ "1 – 1".

Άρα η $x=0$ θα είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης.

β) Εξ' υποθέσεως $\dfrac{dx}{dt}=2\dfrac{dy}{dt}\Leftrightarrow\dfrac{dx}{dt}=2\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}$ (1)

Αφού εξ υποθέσεως $x'(t)>0$ άρα $\dfrac{dx}{dt}>0$, οπότε $\dfrac{dx}{dt}\neq 0$

Από (1) $\Leftrightarrow 1=2\dfrac{dy}{dx}\Leftrightarrow\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow f'(x)=f'(0)\overset{(*)}{\Leftrightarrow}x=0$

(*) Αφού f κυρτή στο R, άρα $f'\uparrow$ στο R , άρα f'"1 – 1"

Άρα το ζητούμενο σημείο της C_f είναι το $M\left(0,\ f(0)\right)$, δηλαδή $M(0,\ 1)$

Δ3. $g(x)=\left(x\cdot f(x)+1-e\right)^2(x-2)^2 \Leftrightarrow$

$$g(x)=\left(x\cdot\frac{e^x-1}{x}+1-e\right)^2(x-2)^2 \Leftrightarrow$$

$$g(x)=\left(e^x-1+1-e\right)^2(x-2)^2$$

$$g(x)=\left(e^x-e\right)^2(x-2)^2$$

$$g'(x)=2\left(e^x-e\right)\cdot e^x(x-2)^2+\left(e^x-e\right)^2 2(x-2)$$

$$g'(x)=2\left(e^x-e\right)(x-2)\left[e^x(x-2)+e^x-e\right]$$

$$g'(x)=2\left(e^x-e\right)(x-2)\left(x\cdot e^x-e^x-e\right)$$

Έστω $h(x)=x\cdot e^x-e^x-e,\quad x\in R$

$h'(x)=x\cdot e^x\ ,\ \ x\in R$

$h'(x)=0\Leftrightarrow x\cdot e^x=0\Leftrightarrow x=0$

$h'(x)>0\Leftrightarrow x\cdot e^x>0\Leftrightarrow x>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
h΄	$-$	0	$+$
h	↘	Ολ.Ελαχ. h(0) = -1-e	↗

h συνεχής στο [1, 2] ως πράξη συνεχών

$$\left.\begin{array}{l} h(1)=-e<0 \\ h(2)=2e^2-e^2-e=e^2-e=e(e-1)>0 \end{array}\right\} h(0)\cdot h(2)<0$$

Οπότε από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,\ 2)$

τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$ και επειδή $h \uparrow$ στο $(0,\ +\infty)$, θα είναι και η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\left(e^x - e\right)(x-2)\left(xe^x - e^x - e\right) = 0$$

$$\begin{cases} e^x - e = 0 \Leftrightarrow e^x = e \Leftrightarrow x = 1 & \qquad e^x - e > 0 \overset{e^x \uparrow}{\Leftrightarrow} x > 1 \\ x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 & \qquad x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2 \\ x \cdot e - e^x - e = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 & \qquad h(x) > 0 \overset{h \uparrow}{\Leftrightarrow} x > x_0 \end{cases}$$

x	0		1		x_0		2		$+\infty$
e^x-e		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x-2		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
xe^x-e^x-e		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

x	0		1		x_0		2		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	Τ.Ελ.	$\nearrow$	Τ.Μεγ.	$\searrow$	Τ.Ελ.	$\nearrow$	

Άρα η g έχει ακριβώς 2 θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου.