ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ

κύριο ΦΟΥΝΤΟΥΛΑΚΗ ΜΑΝΩΛΗ

κυρία ΦΟΥΝΤΟΥΛΑΚΗ ΑΓΓΕΛΙΚΗ

του ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ

Όριον φροντιστήριο μέσης εκπαίδευσης

www.orion.edu.gr

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελ. 31 Σχολικού Βιβλίου

Α2. Ορισμός σελ. 22 Σχολικού Βιβλίου

Α3. Ορισμός σελ. 87 Σχολικού Βιβλίου

Α4. $\alpha \to \Lambda$
$\beta \to \Sigma$
$\gamma \to \Lambda$
$\delta \to \Lambda$
$\varepsilon \to \Sigma$

ΘΕΜΑ Β

Β1. $(3x-1)(8x^2-6x+1)=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3} \\ 8x^2-6x+1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{1}{4} \end{cases} \end{cases}$$

Επειδή ισχύει:

$A\cap B \subseteq A \subseteq A\cup B$ και $P(A\cap B)$, $P(A)$, $P(A\cup B)$ ανήκουν στο σύνολο $\left\{\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right\}$, θα είναι $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$, $P(A)=\frac{1}{3}$ και $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$.

Β2. $P(A'-B')=P\left(A'\cap(B')'\right)=P(A'\cap B)=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$

Από προσθετικό νόμο ισχύει:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(B)=P(A\cup B)+P(A\cap B)-P(A)\Leftrightarrow$

$P(B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\Leftrightarrow P(B)=\frac{6+3-4}{12}\Leftrightarrow P(B)=\frac{5}{12}$

Άρα $P(A'-B')=\frac{5}{12}-\frac{1}{4}=\frac{5-3}{12}=\frac{1}{6}$

$P(\Delta)=P\left((A\cap B)'\right)=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

Β3. $P(E)=P\left((A-B)\cup(B-A)\right)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=$

$=\frac{1}{3}+\frac{5}{12}-2\frac{1}{4}=\frac{4+5-6}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

Β4. $9x^2-3x-2=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{2}{3}\\ x_2=-\frac{1}{3}\end{cases}$

$P(\Gamma)\in\left\{-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right\}$ και $0\le P(\Gamma)\le 1$ άρα $P(\Gamma)=\frac{2}{3}$

Έστω ότι τα ενδεχόμενα Β και Γ είναι ασυμβίβαστα, τότε από απλό προσθετικό νόμο

ισχύει $P(B\cup\Gamma)=P(B)+P(\Gamma)=\frac{5}{12}+\frac{2}{3}=\frac{5+8}{12}=\frac{13}{12}>1$ άτοπο

Άρα τα ενδεχόμενα Β και Γ δεν είναι ασυμβίβαστα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f_1\% = 10 \Leftrightarrow f_1 = 0,1 \qquad f_5\% = 30 \Leftrightarrow f_5 = 0,3$

$$\alpha_3 = f_3 \cdot 360 \Leftrightarrow f_3 = \frac{\alpha_3}{360} \Leftrightarrow f_3 = \frac{108^o}{360^o} \Leftrightarrow f_3 = 0,3 \Leftrightarrow f_3\% = 30$$

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1 \Leftrightarrow 0,1 + f_2 + 0,3 + f_4 + 0,3 = 1 \Leftrightarrow$$

$$f_2 + f_4 = 0,3 \Leftrightarrow f_4 = 0,3 - f_2 \qquad (1)$$

$$\overline{x} = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 + x_5 f_5$$

$$14 = 9 \cdot 0,1 + 11 \cdot f_2 + 13 \cdot 0,3 + 15 \cdot f_4 + 17 \cdot 0,3$$

$$14 = 0,9 + 11 \cdot f_2 + 3,9 + 15 \cdot f_4 + 5,1 \Leftrightarrow 11 \cdot f_2 + 15 \cdot f_4 = 4,1 \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$11 \cdot f_2 + 15(0,3 - f_2) = 4,1 \Leftrightarrow 11 \cdot f_2 + 4,5 - 15 \cdot f_2 = 4,1 \Leftrightarrow$$

$$-4f_2 = -0,4 \Leftrightarrow f_2 = 0,1 \Leftrightarrow f_2\% = 10$$

$$(1) \Rightarrow f_4 = 0,3 - 0,1 \Rightarrow f_4 = 0,2 \Leftrightarrow f_4\% = 20$$

Γ2. $s^2 = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i - \overline{x})^2 v_i \Leftrightarrow s^2 = \sum_{i=1}^{\kappa}(x_i - \overline{x})^2 \cdot \frac{v_i}{v} \Leftrightarrow s^2 = \sum_{i=1}^{\kappa}(x_i - \overline{x})^2 \cdot f_i$

$$s^2 = (9-14)^2 \cdot 0,1 + (11-14)^2 \cdot 0,1 + (13-14)^2 \cdot 0,3 + (15-14)^2 \cdot 0,2 + (17-14)^2 \cdot 0,3$$

$$s^2 = 25 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,2 + 9 \cdot 0,3$$

$$s^2 = 2,5 + 0,9 + 0,3 + 0,2 + 2,7$$

$$s^2 = 6,6 \Leftrightarrow s = \sqrt{6,6} \Leftrightarrow s \simeq 2,57$$

$$CV = \frac{s}{x} = \frac{2,57}{14} \simeq 0,184 = 18,4\% > 10\%$$

άρα το δείγμα των παρατηρήσεων δεν είναι ομοιογενές.

Γ3. $\sum_{i=1}^{4} x_i v_i = 1780 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4} x_i \frac{v_i}{v} = \frac{1780}{v} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4} x_i f_i = \frac{1780}{v} \Leftrightarrow$

$$9 \cdot 0{,}1 + 11 \cdot 0{,}1 + 13 \cdot 0{,}3 + 15 \cdot 0{,}2 = \frac{1780}{v} \Leftrightarrow$$

$$0{,}9 + 1{,}1 + 3{,}9 + 3 = \frac{1780}{v} \Leftrightarrow 8{,}9 = \frac{1780}{v} \Leftrightarrow v = \frac{1780}{8{,}9} \Leftrightarrow v = 200$$

Γ4. $\overline{\beta} = \frac{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5}{5} =$

$$\frac{\frac{\alpha_1 - \overline{\alpha}}{s_\alpha} + \frac{\alpha_2 - \overline{\alpha}}{s_\alpha} + \ldots + \frac{\alpha_5 - \overline{\alpha}}{s_\alpha}}{5} = \frac{\alpha_1 - \overline{\alpha} + \alpha_2 - \overline{\alpha} + \ldots + \alpha_5 - \overline{\alpha}}{5 \cdot s_\alpha} =$$

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_5}{5 \cdot s_\alpha} - \frac{5\overline{\alpha}}{5 \cdot s_\alpha} = \frac{\overline{\alpha}}{s_\alpha} - \frac{\overline{\alpha}}{s_\alpha} = 0$$

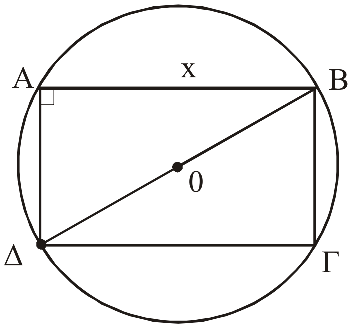
$$s_\beta^2 = \frac{\left(\beta_1 - \overline{\beta}\right)^2 + \left(\beta_2 - \overline{\beta}\right)^2 + \ldots + \left(\beta_5 - \overline{\beta}\right)^2}{5} = \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots + \beta_5^2}{5} =$$

$$\frac{\left(\frac{\alpha_1 - \overline{\alpha}}{s_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_2 - \overline{\alpha}}{s_\alpha}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\alpha_5 - \overline{\alpha}}{s_\alpha}\right)^2}{5} =$$

$$\frac{\left(\alpha_1 - \overline{\alpha}\right)^2 + \left(\alpha_2 - \overline{\alpha}\right)^2 + \ldots + \left(\alpha_5 - \overline{\alpha}\right)^2}{5 \cdot s_\alpha^2} = \frac{s_\alpha^2}{s_\alpha^2} = 1, \quad \text{άρα} \quad s_\beta = 1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.



$$AB^2 + A\Delta^2 = B\Delta^2 \Leftrightarrow$$
$$x^2 + A\Delta^2 = 10^2 \Leftrightarrow$$
$$A\Delta^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow$$
$$A\Delta = \sqrt{100 - x^2}$$

$$(AB\Gamma\Delta) = AB \cdot A\Delta = x \cdot \sqrt{100 - x^2}$$

Πρέπει $AB > 0 \Leftrightarrow x > 0$ και $A\Delta > 0 \Leftrightarrow \sqrt{100 - x^2} > 0 \Leftrightarrow$

$$100 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 100 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x < 10$$

Άρα $f(x) = x\sqrt{100 - x^2}$, $\quad 0 < x < 10$

Δ2. $f'(x) = (x)'\sqrt{100 - x^2} + x\left(\sqrt{100 - x^2}\right)' = \sqrt{100 - x^2} + x\dfrac{1}{2\sqrt{100 - x^2}}(-2x)$

$$= \sqrt{100 - x^2} - \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - x^2 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} =$$

$$= \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}, \quad 0 < x < 10$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow 100 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 100 \Leftrightarrow$$

$x^2 = 50 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 5\sqrt{2} \in (0,\ 10)$ δεκτή

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} > 0 \overset{\sqrt{100 - x^2} > 0}{\Leftrightarrow} 100 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 < 50 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x < 5\sqrt{2}$$

$$f'(x) < 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x > 5\sqrt{2}$$

x	0		$5\sqrt{2}$		10
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	Μεγ.	$\searrow$	

Άρα το εμβαδόν γίνεται μέγιστο όταν $x = 5\sqrt{2}$.

Τότε $A\Delta = \sqrt{100 - x^2} = \sqrt{100 - \left(5\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{100 - 50} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

Άρα $AB = A\Delta$, δηλαδή το εμβαδόν γίνεται μέγιστο όταν το ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

Δ3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98 \cdot x} = \dfrac{1}{98} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(1+x) - f(1)}{x} =$

$$\frac{1}{98} \cdot f'(1) = \frac{1}{98} \cdot \frac{100 - 2 \cdot 1}{\sqrt{100-1}} = \frac{98}{98\sqrt{99}} = \frac{1}{\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{99}}{99}$$

Δ4. $0 < P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) \le P(A) \le 1$

$$P(A-B) \le P(A) \overset{f\uparrow\ /\ (0,1]}{\Leftrightarrow} f\left(P(A-B)\right) \le f\left(P(A)\right) \Leftrightarrow$$

$$P(A-B)\sqrt{100 - P^2(A-B)} \le P(A)\sqrt{100 - P^2(A)} \underset{\sqrt{100-P^2(A)}>0}{\overset{\sqrt{100-P^2(A-B)}>0}{\Leftrightarrow}}$$

$$\frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}} \le \frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} \qquad (1)$$

$$0 < P(A-B) \le 1 \qquad (2)$$

$$0 < P(A) \le 1 \Leftrightarrow 0 < P^2(A) \le 1 \Leftrightarrow -1 \le -P^2(A) < 0 \Leftrightarrow$$

$$99 \le 100 - P^2(A) < 100 \Leftrightarrow \sqrt{99} \le \sqrt{100 - P^2(A)} < 10 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{10} < \frac{1}{\sqrt{100 - P^2(A)}} \le \frac{1}{\sqrt{99}} \qquad (3)$$

$$(2),\ (3) \ \Rightarrow 0 < \frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}} \le \frac{1}{\sqrt{99}}$$

Ομοίως $0 < \dfrac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} \le \dfrac{1}{\sqrt{99}}$

Αφού f↑ στο $\left(0,\ \dfrac{1}{\sqrt{99}}\right]$ από (1) $\Rightarrow$

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}}\right) \le f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}}\right)$$