ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ

κύριο ΦΟΥΝΤΟΥΛΑΚΗ ΜΑΝΩΛΗ

κυρία ΦΟΥΝΤΟΥΛΑΚΗ ΑΓΓΕΛΙΚΗ

του ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ

Όριον φροντιστήριο μέσης εκπαίδευσης

www.orion.edu.gr

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη από τη σελ. 194 του σχολικού βιβλίου

Α2. Ορισμός από τη σελ. 188 του σχολικού βιβλίου

Α3. Ορισμός από τη σελ. 259 του σχολικού βιβλίου

Α4. $\alpha \to \Lambda$
$\beta \to \Sigma$
$\gamma \to \Lambda$
$\delta \to \Sigma$
$\varepsilon \to \Sigma$

ΘΕΜΑ Β

Β1. $|z-4| = 2|z-1| \Leftrightarrow |z-4|^2 = 4|z-1|^2 \Leftrightarrow$

$$(z-4)(\bar{z}-4) = 4(z-1)(\bar{z}-1) \Leftrightarrow$$

$$z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 16 = 4z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 4 \Leftrightarrow$$

$$-3z\bar{z} = -12 \Leftrightarrow z\bar{z} = 4 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2$$

άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο $O(0,0)$, ακτίνα $\rho = 2$ και εξίσωση $x^2 + y^2 = 4$.

Β2. **α)** $|z_1| = 2 \Leftrightarrow \overline{z}_1 = \dfrac{4}{z_1}$ $\qquad$ $|z_2| = 2 \Leftrightarrow \overline{z}_2 = \dfrac{4}{z_2}$

<u>α' τρόπος</u>

$$\overline{w} = \overline{\left(\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}\right)} = \frac{2\overline{z}_1}{\overline{z}_2} + \frac{2\overline{z}_2}{\overline{z}_1} = \frac{2\dfrac{4}{z_1}}{\dfrac{4}{z_2}} + \frac{2\dfrac{4}{z_2}}{\dfrac{4}{z_1}} =$$

$$\frac{2z_2}{z_1} + \frac{2z_1}{z_2} = w$$

$$\overline{w} = w \Leftrightarrow w - \overline{w} = 0 \Leftrightarrow 2\,\mathrm{Im}(w)i = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(w) = 0 \Leftrightarrow w \in R$$

<u>β' τρόπος</u>

$$w = 2\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}\right) = 2\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{\dfrac{4}{\overline{z}_2}}{\dfrac{4}{\overline{z}_1}}\right) = 2\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}\right) =$$

$$= 2\left[\frac{z_1}{z_2} + \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}\right] = 4\,\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \in R$$

β) $$|w| = \left|\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}\right| \leq \left|\frac{2z_1}{z_2}\right| + \left|\frac{2z_2}{z_1}\right| = \frac{2|z_1|}{|z_2|} + \frac{2|z_2|}{|z_1|} =$$

$$\frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 2}{2} = 2 + 2 = 4$$

Άρα $|w| \leq 4$ και $w \in R$, άρα $-4 \leq w \leq 4$.

Β3. $w=-4 \Leftrightarrow \dfrac{2z_1}{z_2}+\dfrac{2z_2}{z_1}=-4 \Leftrightarrow 2z_1^2+2z_2^2=-4z_1z_2 \Leftrightarrow$

$z_1^2+z_2^2=-2z_1z_2 \Leftrightarrow z_1^2+2z_1z_2+z_2^2=0 \Leftrightarrow$

$\left(z_1+z_2\right)^2=0 \Leftrightarrow z_1+z_2=0 \Leftrightarrow z_1=-z_2$

$\left(AB\right)=\left|z_2-z_1\right|=\left|z_2-z_2\right|=2\left|z_2\right|=2\cdot 2=4$

$\left(A\Gamma\right)=\left|z_3-z_1\right|=\left|2iz_1-z_1\right|=\left|z_1\right|\cdot\left|2i-1\right|=\sqrt{1+4}\left|z_1\right|=2\cdot\sqrt{5}$

$\left(B\Gamma\right)=\left|z_3-z_2\right|=\left|2iz_1-z_2\right|=\left|-2iz_2-z_2\right|=\left|-2iz_2-z_2\right|=$

$=\left|z_2\right|\cdot\left|-1-2i\right|=2\sqrt{\left(-1\right)^2+\left(-2\right)^2}=2\sqrt{5}$

Άρα $\left(A\Gamma\right)=\left(B\Gamma\right)$, οπότε ΑΒΓ ισοσκελές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. f συνεχής στο R ως πηλίκο συνεχών και παρ/μη με

$$f'\left(x\right)=\left(\frac{e^x}{x^2+1}\right)'=\frac{e^x\left(x^2+1\right)-e^x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{e^x\left(x^2-2x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{e^x\left(x-1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow=\frac{e^x\left(x-1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow x=1$$

και για $x\neq 1$ θα είναι $\left(x-1\right)^2>0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x\left(x-1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^2}>0 \Leftrightarrow f'\left(x\right)>0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f′		+	0	+	
f		↗		↗	

και επειδή f συνεχής στο R, θα είναι f γνησίως αύξουσα στο R.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty}\left(e^x \cdot \frac{1}{x^2+1}\right) = 0$$

επειδή $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ και $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+1\right) = +\infty$, άρα $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+1} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

f γνησίως αύξουσα και συνεχής στο πεδίο ορισμού της $A = \mathbb{R}$, οπότε το σύνολο τιμών θα είναι $f(A) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x),\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (0,\ +\infty)$.

Γ2. $f\left(e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)\right) = \frac{e^2}{5} \Leftrightarrow f\left(e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)\right) = f(2)$

Επειδή f γνησίως αύξουσα στο R θα είναι και "1 – 1", άρα

$$e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{e^3\cdot\left(x^2+1\right)}{e^x} = 2 \Leftrightarrow e^3\cdot\left(x^2+1\right) = 2e^x \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^x}{x^2+1} = \frac{e^3}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^3}{2}$$

$\frac{e^3}{2} \in f(A) = (0,\ +\infty)$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in A = R$,

τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{e^3}{2}$ και επειδή $f \uparrow$, οπότε "1 – 1" θα είναι μοναδικό.

Άρα η εξίσωση έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

Γ3. **<u>α' τρόπος</u>**

Έστω $F(u) = \int_0^u f(t)\,dt$ με $F'(u) = f(u)$

F συνεχής στο $[2x,\ 4x]$ και παραγωγίσιμη στο $(2x,\ 4x)$, οπότε από Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (2x,\ 4x)$ τέτοιο ώστε $F'(\xi) = \dfrac{F(4x) - F(2x)}{4x - 2x} \Leftrightarrow$

$$f(\xi) = \frac{\int_0^{4x} f(t)dt - \int_0^{2x} f(t)dt}{2x} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{\int_0^{4x} f(t)dt + \int_{2x}^{0} f(t)dt}{2x} \Leftrightarrow$$

$$f(\xi) = \frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{2x}$$

$$2x < \xi < 4x \xRightarrow{f \uparrow} f(\xi) < f(4x) \Leftrightarrow \frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{2x} < f(4x) \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2x \cdot f(4x)$$

<u>β’ τρόπος</u>

$$0 < x < 2x \le t \le 4x \xRightarrow{f \uparrow / R} f(2x) \le f(t) \le f(4x)$$

Άρα $f(4x) - f(t) \ge 0$

Η συνάρτηση $g(t) = f(4x) - f(t)$, $t \in R$ είναι συνεχής στο R,

άρα και στο $[2x,\ 4x]$ με $x > 0$.

Άρα $\int_{2x}^{4x} \left(f(4x) - f(t)\right)dt > 0$ γιατί η g δεν είναι πάντα 0.

$$\int_{2x}^{4x} \left(f(4x) - f(t)\right)dt > 0 \Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(4x)dt - \int_{2x}^{4x} f(t)dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)dt < f(4x)\int_{2x}^{4x} 1dt \Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)dt < f(4x)[t]_{2x}^{4x} \Leftrightarrow$$

$$\int_{2x}^{4x} f(t)dt < f(4x)(4x - 2x) \Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2xf(4x)$$

Γ4. $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}\int_{2x}^{4x} f(t)dt = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_{2x}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{4x} f(t)dt}{x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{4x} f(t)dt - \int_0^{2x} f(t)dt}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{F(4x)-F(2x)}{x} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{F'(4x)\cdot(4x)' - F'(2x)\cdot(2x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{f(4x)\cdot 4 - f(2x)\cdot 2}{1}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(4f(4x)-2f(2x)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{4e^{4x}}{(4x)^2+1} - \frac{2e^{2x}}{(2x)^2+1}\right) = 4-2 = 2 = g(0).$$

Άρα g συνεχής στο $x_0 = 0$.

Για $x > 0$ $\quad g(x) = \dfrac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x} = \dfrac{F(4x)-F(2x)}{x}$ συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Άρα g συνεχής στο $[0, +\infty)$.

Για $x > 0$ $\quad g'(x) = \left(\dfrac{F(4x)-F(2x)}{x}\right)' =$

$$= \frac{\left(F(4x)-F(2x)\right)'\cdot x - \left[F(4x)-F(2x)\right]\cdot(x)'}{x^2} =$$

$$= \frac{\left[F'(4x)\cdot 4 - F'(2x)\cdot 2\right]\cdot x - \left[F(4x)-F(2x)\right]}{x^2} =$$

$$= \frac{\left[4f(4x)-2f(2x)\right]\cdot x - \left[F(4x)-F(2x)\right]}{x^2} =$$

$$= \frac{\left[2f(4x)+2f(4x)-2f(2x)\right]\cdot x - \int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x^2} =$$

$$= \frac{2x\left[f(4x)-f(2x)\right] + 2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x^2} > 0$$

επειδή $x > 0$ άρα $2x < 4x \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(2x) < f(4x) \Leftrightarrow f(4x)-f(2x) > 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow}$

$= 2x\left[f\left(4x\right) - f\left(2x\right)\right] > 0$

και $2xf\left(4x\right) - \int_{2x}^{4x} f\left(t\right)dt > 0$ από το Γ3.

Οπότε $g'\left(x\right) > 0$ στο $\left(0,\ +\infty\right)$ και g συνεχής στο $\left[0,\ +\infty\right)$,

άρα g γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\ +\infty\right)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Εξ υποθέσεως ισχύει για κάθε $x \in R$:

$$f'\left(x\right)\left[e^{f\left(x\right)} + e^{-f\left(x\right)}\right] = 2 \Leftrightarrow e^{f\left(x\right)}f'\left(x\right) + e^{-f\left(x\right)} \cdot f'\left(x\right) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\left(e^{f\left(x\right)}\right)' - \left(e^{-f\left(x\right)}\right)' = \left(2x\right)' \Leftrightarrow \left(e^{f\left(x\right)} - e^{-f\left(x\right)}\right)' = \left(2x\right)'$$

Άρα θα ισχύει: $e^{f\left(x\right)} - e^{-f\left(x\right)} = 2x + c$ για κάθε $x \in R$.

Για $x = 0$ έχουμε: $e^{f\left(0\right)} - e^{-f\left(0\right)} = c \overset{f(0)=0}{\Rightarrow} 1 - 1 = c \Leftrightarrow c = 0$

Άρα $e^{f\left(x\right)} - e^{-f\left(x\right)} = 2x \Leftrightarrow e^{f\left(x\right)} - \dfrac{1}{e^{f\left(x\right)}} = 2x \Leftrightarrow \left(e^{f\left(x\right)}\right)^2 - 1 = 2xe^{f\left(x\right)} \Leftrightarrow$

$$\left(e^{f\left(x\right)}\right)^2 - 2xe^{f\left(x\right)} = 1 \Leftrightarrow \left(e^{f\left(x\right)}\right)^2 - 2xe^{f\left(x\right)} + x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(e^{f\left(x\right)} - x\right)^2 = x^2 + 1 \quad (1)$$

Θέτουμε $M\left(x\right) = e^{f\left(x\right)} - x$, $x \in R$

Η M συνεχής στο R ως πράξη συνεχών.

Από (1) $\Rightarrow M^2\left(x\right) = x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in R$.

Άρα $M^2\left(x\right) \neq 0$ για κάθε $x \in R$ και M συνεχής άρα $M(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$, οπότε η M διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R.

$M(0) = e^{f(0)} - 0 = e^0 = 1 > 0$

Άρα $M(x) > 0$ για κάθε $x \in R$,

οπότε από (1) $\Rightarrow M(x) = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow e^{f(x)} - x = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow$

$e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2+1}$ για κάθε $x \in R$.

Θα δείξουμε ότι $x + \sqrt{x^2+1} > 0$ για κάθε $x \in R$

$x + \sqrt{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > -x$ (2)

- Αν $x > 0$ ισχύει η σχέση αφού $\sqrt{x^2+1} > 0 > -x$
- Αν $x \leq 0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 > (-x)^2 \Leftrightarrow x^2 + 1 > x^2 \Leftrightarrow 1 > 0$ ισχύει

Άρα για κάθε $x \in R$ ισχύει $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.

Αφού $e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2+1} \overset{\ln x \text{ "1-1"}}{\Leftrightarrow} \ln e^{f(x)} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \Leftrightarrow$

$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $x \in R$

Δ2. α) $f'(x) = \dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1 + \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} =$

$$= \frac{\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x \in R$$

Άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in R$, οπότε $f \uparrow$ / $A_f = R$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=\frac{-\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1}=-\frac{\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=-\frac{x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}\ ,\quad x\in R$$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow x<0$

$f''(x)<0 \Leftrightarrow x>0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	−	
f		$\smile$	σ. κ.	$\frown$	

Η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(-\infty,\ 0]$, τα κοίλα κάτω στο $[0,\ +\infty)$

και παρουσιάζει σημείο καμπής για $x=0$ $\quad f(0)=0$

β) Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $O(0,0)$ είναι:

$\varepsilon:\ y-f(0)=f'(0)(x-0) \qquad \varepsilon:\ y-0=1\cdot x \qquad \varepsilon:\ y=x$

Αφού η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[0,\ +\infty)$, η ευθεία $\varepsilon:\ y=x$ θα είναι πάνω

από την C_f στο διάστημα $[0,\ +\infty)$ μ άρα και στο διάστημα $[0,\ 1]$.

Έστω $g(x)=x,\quad x\in R$

Η g συνεχής στο R, άρα και στο $[0,\ 1]$ ως πολυωνυμική.

Η f συνεχής στο R άρα και στο $[0,\ 1]$ ως παραγωγίσιμη.

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν θα ισούται:

$$E=\int_0^1\left|g(x)-f(x)\right|dx=\int_0^1\left(g(x)-f(x)\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(x-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)dx=\int_0^1 xdx-\int_0^1\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\int_0^1 x'\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}-\left[x\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1+\int_0^1 x\cdot\frac{1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}dx=$$

$$=\frac{1}{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\int_0^1\frac{x\cdot\frac{\cancel{\sqrt{x^2+1}+x}}{x+\sqrt{x^2+1}}}{\cancel{x+\sqrt{x^2+1}}}dx=$$

$$=\frac{1}{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{1}{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\int_0^1\frac{\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}}dx=$$

$$=\frac{1}{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1=\frac{1}{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}-1=\sqrt{2}-\frac{1}{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\text{ τ.μ.}$$

Δ3. Αφού $x\to 0^+\Rightarrow x>0\overset{f\uparrow/R}{\Rightarrow}f(x)>f(0)=0$

Άρα $\left|f(x)\right|=f(x)$

Η f συνεχής στο R, άρα και η f^2 συνεχής στο R, οπότε η συνάρτηση

$\int_0^x f^2(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R, όπως επίσης και

η συνάρτηση $e^{\int_0^x f^2(t)dt}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left|f(x)\right|=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left|f(x)\right|=-\infty$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)=0$$

Άρα το όριο είναι απροσδιοριστία της μορφής $0(-\infty)$

$$x\to 0^+ \Rightarrow x>0 \Rightarrow \left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\cdot \ln\left|f(x)\right| \overset{f(x)>0}{=} \frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{x}\cdot x\cdot \ln\left(f(x)\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{x} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0^+} e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f^2(x)=e^0\cdot f^2(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot \ln\left(f(x)\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(f(x)\right)}{\frac{1}{x}} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2 f'(x)}{f(x)}=-\lim_{x\to 0^+}\left[f'(x)\cdot\frac{x^2}{f(x)}\right]$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=f'(0)=1$, αφού f' συνεχής.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{f(x)} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{f'(x)}=\frac{0}{f'(0)}=\frac{0}{1}=0$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\cdot \ln\left(f(x)\right)\right)=0$

οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{x}\cdot x\ln\left(f(x)\right)=0\cdot 0=0$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\cdot \ln\left|f(x)\right|\right]=0$

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$t(x)=(x-2)\left[1-3\int_0^{x-2} f(t^2)dt\right]+(x-3)\left[8-3\int_0^x f^2(t)dt\right],\quad x\in R$$

Η t είναι συνεχής στο $[2,\ 3]$ ως πράξη συνεχών

$t(2)=-8+3\int_0^2 f^2(t)dt$

$t(3)=1-3\int_0^1 f(t^2)dt$

$f(x)\le x$ για κάθε $x\ge 0$ από Δ3.

Η ισότητα θα ισχύει μόνο για $x=0$. $f(x)>0$ για κάθε $x>0$.

Άρα $f^2(t)\le t^2$ για κάθε $t\in[0,\ 2]$

Άρα $\int_0^2\left(f^2(t)-t^2\right)dt<0$ αφού η ισότητα $f^2(t)=t^2$ θα ισχύει μόνο για $t=0$.

$$\int_0^2\left(f^2(t)-t^2\right)dt<0\Leftrightarrow\int_0^2 f^2(t)dt-\int_0^2 t^2dt<0$$

$$\Leftrightarrow\int_0^2 f^2(t)dt<\int_0^2 t^2(t)dt\Leftrightarrow\int_0^2 f^2(t)dt<\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_0^2 f^2(t)dt<\frac{8}{3}\Leftrightarrow 3\int_0^2 f^2(t)dt<8\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8+3\int_0^2 f^2(t)dt<0\Leftrightarrow t(2)<0$$

Ομοίως $f(t^2)\le t^2$ για κάθε $t\in[0,\ 1]$

Άρα $\int_0^1\left(f(t^2)-t^2\right)dt<0$ αφού η ισότητα θα ισχύει μόνο για $t=0$.

$$\int_0^1\left(f(t^2)-t^2\right)dt<0\Leftrightarrow\int_0^1 f(t^2)dt-\int_0^1 t^2dt<0$$

$$\Leftrightarrow\int_0^1 f(t^2)dt<\int_0^1 t^2dt\Leftrightarrow\int_0^1 f(t^2)dt<\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f\left(t^2\right)dt < \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3\int_0^1 f\left(t^2\right)dt < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-3\int_0^1 f\left(t^2\right)dt > 0 \Leftrightarrow t(3) > 0$$

Άρα $t(2)t(3) < 0$

Οπότε από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (2,\ 3)$:

$$t(x_0) = 0 \Leftrightarrow (x_0-2)\left[1-3\int_0^{x_0-2} f\left(t^2\right)dt\right] + (x_0-3)\left[8-3\int_0^{x_0} f^2(t)dt\right] = 0$$

$$\underset{x_0\neq 3}{\overset{x_0\neq 2}{\Leftrightarrow}} \frac{1-3\int_0^{x_0-2} f\left(t^2\right)dt}{x_0-3} + \frac{8-3\int_0^{x_0} f^2(t)dt}{x_0-2} = 0$$

Άρα η δοθείσα εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (2, 3).